

Das Babinettsche Prinzip der Optik

Von JOSEF MEIXNER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. 1, 496—498 [1946]; eingegangen am 27. Juni 1946)

Es wird gezeigt, daß sich das Babinettsche Prinzip auch auf strenge Lösungen des elektromagnetischen Beugungsproblems übertragen läßt, wenn der beugende Schirm und der komplementäre Schirm eben und vollkommen leitend sind. Mit Hilfe dieses Prinzips kann aus dem elektromagnetischen Feld des einen Beugungsproblems das des komplementären Beugungsproblems für jeden Raumpunkt unmittelbar und in Strenge gewonnen werden.

Das Babinettsche Prinzip gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Beugungerscheinungen bei Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem ebenen Schirm bzw. in der dazu komplementären Öffnung. Dieses Prinzip gilt in der Regel als Ergebnis der Kirchhoffschen Beugungstheorie und bräuchte daher nicht notwendig in Strenge zu gelten. Doch hat v. Laue¹ bemerkt, daß sich dieses Prinzip in etwas modifizierter Form auf die strengen Lösungen des elektromagnetischen Beugungsproblems für den unendlich langen Streifen und den dazu komplementären Spalt übertragen läßt. Dies ist jedoch kein vereinzelter Ausnahmefall. Wir beweisen vielmehr im folgenden den Satz:

Trifft eine elektromagnetische Welle, aus dem Halbraum $z \geq 0$ kommend, auf einen vollkommen leitenden ebenen Schirm F' mit einer ganz im Endlichen liegenden Öffnung F , so entsteht eine nach den Reflexionsgesetzen zu berechnende reflektierte Welle und eine von der Öffnung ausgehende Beugungswelle, welche in großer Entfernung den Charakter einer Kugelwelle hat. Ersetzt man nun

1. die reflektierte Welle, welche nur für $z > 0$ vorhanden ist, durch die Fortsetzung der einfallenden Welle in den Halbraum $z < 0$,

2. \mathfrak{E} durch \mathfrak{H} und \mathfrak{H} durch $-\mathfrak{E}$ sowohl in der einfallenden wie in der gebeugten Welle, so hat man die strenge Lösung des Problems der Beugung einer einfallenden elektromagnetischen Welle am vollkommen leitenden ebenen Schirm F , d. h. des komplementären Beugungsproblems.

¹ M. v. Laue, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. VIII, S. 344. Leipzig 1928.

Im wichtigen Fall einer einfallenden *ebenen* Welle läßt sich dieser Satz noch etwas übersichtlicher formulieren:

Dem Übergang von einer parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtwelle zu einer senkrecht polarisierten und dem gleichzeitigen Übergang zur komplementären Beugungsfigur entspricht in der gebeugten Welle die Ersetzung von \mathfrak{E} durch \mathfrak{H} und von \mathfrak{H} durch $-\mathfrak{E}$, d. h. in genügender Entfernung von der beugenden Öffnung bzw. dem beugenden Schirm eine Drehung der Polarisationsebene um 90° .

In den obigen Formulierungen ist vorausgesetzt, daß alle Wellen im Vakuum laufen; in einem homogenen Dielektrikum bleibt alles mit unwesentlichen Änderungen gültig.

Der Beweis ist verhältnismäßig einfach und gelingt durch Kombination der Methode, mit welcher Bouwkamp² das verfeinerte Babinettsche Prinzip für die Beugung akustischer ebener Wellen an ebenen Schirmen und komplementären Öffnungen beweist, mit dem Verfahren, womit der Verf.³ das elektromagnetische Beugungsproblem an vollkommen leitenden ebenen Figuren auf zwei voneinander unabhängige skalare Beugungsprobleme zurückführt.

Für zeitlich periodische Vorgänge im Vakuum mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ lauten die Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = ik\mathfrak{E}, \text{ rot } \mathfrak{E} = -ik\mathfrak{H}. \quad (1)$$

² Ch. J. Bouwkamp, Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door en ronde opening. Diss. (Groningen). Groningen-Batavia 1941.

³ Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl., im Druck.



k ist die Wellenzahl, \mathfrak{E} die elektrische, \mathfrak{H} die magnetische Feldstärke. Die vollkommene Leitfähigkeit des beugenden Objekts wird durch die Randbedingungen

$$\mathfrak{E}_{\text{tang}} = 0, \mathfrak{H}_{\text{norm}} = 0 \quad (2)$$

berücksichtigt. Das elektromagnetische Feld \mathfrak{E} , \mathfrak{H} kann man nach P. Debye⁴ durch zwei skalare Potentiale Π_1 und Π_2 darstellen. Es ist, wenn \mathbf{r} = Radiusvektor

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot} (\mathbf{r} \Pi_1) - ik \text{rot} (\mathbf{r} \Pi_2), \quad (3)$$

$$\mathfrak{H} = ik \text{rot} (\mathbf{r} \Pi_1) + \text{rot rot} (\mathbf{r} \Pi_2). \quad (4)$$

Beide Potentiale genügen der Wellengleichung

$$\Delta \Pi_i + k^2 \Pi_i = 0 \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Für das Bestehen der Randbedingungen (2) ist hinreichend, daß³

$$\Pi_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

Die Randbedingungen haben nur dann die einfache Gestalt (6), wenn das vollkommen leitende beugende Objekt *eben* ist. Bei gekrümmten beugenden Flächen sind die Randbedingungen für Π_1 und Π_2 im allgemeinen von sehr komplizierter Art, insbesondere lassen sie sich außer in einigen wenigen Grenzfällen nicht in eine Bedingung für Π_1 allein und eine solche für Π_2 allein separieren. Auf der Möglichkeit der Separierung der Randbedingungen für Π_1 und Π_2 im Falle *ebener* vollkommen leitender Flächen beruht es, daß sich das vektorielle elektromagnetische Beugungsproblem auf zwei skalare Beugungsprobleme zurückführen läßt.

Wir zerlegen den Beweis des Babinetschen Prinzips in fünf Schritte.

1. Die Maxwell'schen Gleichungen (1) bleiben ungeändert, wenn man \mathfrak{E} durch \mathfrak{H} und \mathfrak{H} durch $-\mathfrak{E}$ ersetzt. In den Potentialen Π_1 und Π_2 bedeutet dies, daß Π_1 durch Π_2 und Π_2 durch $-\Pi_1$ ersetzt werden. Für die Randbedingungen (6) an einer vollkommen leitenden ebenen Figur gilt diese Invarianz jedoch nicht.

2. sei irgendein elektromagnetisches Wellenfeld durch die Potentiale Π_1^e , Π_2^e gegeben. Schneiden wir es durch die vollkommen leitende Ebene $z=0$ ab, so müssen wir zum ursprünglichen Feld für $z \geq 0$ ein reflektiertes Feld Π_1^r ,

Π_2^r hinzunehmen, um die Randbedingungen (6) für $z=0$ zu erfüllen. Die Potentiale für das gesamte Feld im Halbraum $z \geq 0$ lauten dann

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1^e(x, y, z) + \Pi_1^r(x, y, z) \\ = \Pi_1^e(x, y, z) - \Pi_1^e(x, y, -z), \\ \Pi_2^e(x, y, z) + \Pi_2^r(x, y, z) \\ = \Pi_2^e(x, y, z) + \Pi_2^e(x, y, -z). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für dieses Feld sind die Randbedingungen (6) auf der ganzen Ebene $z=0$ erfüllt

$$\Pi_1^e + \Pi_1^r = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2^e}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2^r}{\partial z} = 0 \quad (8 \text{ a, b})$$

für $z=0$ und alle x, y .

Aus (7) folgt aber weiter, daß die Beziehungen gelten

$$\frac{\partial \Pi_1^e}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_1^r}{\partial z}, \quad \Pi_2^e = \Pi_2^r \quad (9 \text{ a, b})$$

für $z=0$ und alle x, y .

3. Wir zerlegen nun die vollkommen leitende Ebene $z=0$ in zwei Teilstücke F und F' , von denen F ganz im Endlichen liegt. Dann können wir zwei verschiedene Beugungsprobleme unterscheiden. Die einfallende Welle sei immer durch Π_1^e , Π_2^e gegeben.

Bei der Beugung einfallenden Wellen an F' (Beugung an der Öffnung) wird die einfallende Welle durch die Ebene $z=0$ abgeschnitten; wir haben für $z \geq 0$ die einfallende und die oben berechnete reflektierte Welle, darüber überlagert sich eine von der Öffnung ausgehende Beugungswelle Π_1^b , Π_2^b ; für $z \leq 0$ ist nur diese Beugungswelle vorhanden. Sie hat für $z \gtrless 0$ in großer Entfernung von der Öffnung den Charakter einer Kugelwelle.

Bei der Beugung der einfallenden Welle an F' (Beugung am Schirm) wird sich die einfallende Welle über den ganzen Raum fortsetzen, darüber überlagert sich jedoch eine von F ausgehende Beugungswelle, die in großer Entfernung von F den Charakter einer Kugelwelle hat.

4. Beugung am Schirm F' mit der Öffnung F .

Wir verstehen unter Π_1^e , Π_2^e die Potentiale des einfallenden elektromagnetischen Feldes, unter Π_1^r , Π_2^r die bereits in (7) eingeführten Potentiale des an $F+F'$ reflektierten Feldes; die Öffnung wird durch den Ansatz einer Kugelwelle mit den Potentialen Π_1^b , Π_2^b , welche der Ausstrahlungsbedingung genügen, berücksichtigt. Für

⁴ Ann. Physik 30, 57 [1909].

das elektromagnetische Feld machen wir den Ansatz

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^e + \Pi_1^r + \Pi_1^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ + \Pi_1^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} \Pi_2^e + \Pi_2^r + \Pi_2^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ - \Pi_2^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Dieser Ansatz muß folgenden Forderungen genüge leisten.

- a) Π_1^b und Π_2^b genügen der Wellengleichung.
- b) Sie haben für große Entfernung von F den Charakter von Kugelwellen, welche von F ausgehen, d. h. sie genügen der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung⁵.
- c) Sie erfüllen auf F' die Randbedingungen (6), d. h. wegen (8a, b)

$$\Pi_1^b = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2^b}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } F'. \quad (12 \text{ a, b})$$

d) Auf F , d. h. in der Öffnung, müssen sich die Werte der Funktionen Π_1 bzw. Π_2 sowie ihre Ableitungen nach x, y, z von $z < 0$ her und von $z > 0$ her stetig aneinanderschließen, also wegen (9a, b)

$$\frac{\partial \Pi_1^b}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi_2^b}{\partial z}; \quad \Pi_2^b = - \Pi_1^b \quad \text{in } F. \quad (13 \text{ a, b})$$

Diese vier Forderungen stellen bei gegebener einfallender Welle ein gemischtes Randwertproblem dar: Es sind die Werte von $\partial \Pi_1^b / \partial z$ bzw. Π_2^b auf F , von Π_1^b bzw. $\partial \Pi_2^b / \partial z$ auf F' und die Ausstrahlungsbedingung, daß sich Π_1^b und Π_2^b in großer Entfernung von F für $z > 0$ und für $z < 0$ wie auslaufende Kugelwellen verhalten sollen, gegeben. Hieraus folgen, die Existenz der Lösungen vorausgesetzt, ihre Eindeutigkeit sowie

⁵ A. Sommerfeld, Ber. dtsch. Math.-Ver. 21, 309 [1913].

die Symmetrieeigenschaften von Π_1^b bzw. Π_2^b bezüglich der Ebene $z = 0$, die bereits in den Ansätzen (10) und (11) vorweggenommen wurden.

5. Beugung am Schirm F . Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, daß die Potentiale

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^e + \Pi_1^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ \Pi_1^e + \Pi_1^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} -\Pi_2^e - \Pi_2^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ -\Pi_2^e + \Pi_2^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

die Beugung einer einfallenden Welle mit den Potentialen Π_1^e , $-\Pi_2^e$ (entsprechend der Ersetzung $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \rightarrow -\mathfrak{E}$) am vollkommen leitenden ebenen Schirm F darstellen. Das ist tatsächlich der Fall; denn

a) Π_1 und Π_2 genügen beide der Wellengleichung (5).

b) Die gebeugten Wellen Π_1^b und $-\Pi_2^b$ haben für große Entfernung von F den Charakter von Kugelwellen, welche von F ausgehen.

c) Auf F erfüllen sie die Randbedingungen (6). Es ist $\Pi_1 = 0$ wegen (13b) und $\partial \Pi_2 / \partial z = 0$ wegen (13a).

d) Auf F' gelten die Stetigkeitsbedingungen. Daß Π_1 und $\partial \Pi_2 / \partial z$ für $z = 0$ stetig sind, läßt sich unmittelbar aus (14) und (15) ablesen. Die Stetigkeit von $\partial \Pi_1 / \partial z$ folgt aus (12b), die von Π_2 aus (12a). Da diese Stetigkeitseigenschaften identisch in x, y gelten, so sind auch alle Ableitungen nach x und y stetig. Aus der Wellengleichung (5) folgt dann, daß auch alle Ableitungen nach z stetig sind.

Damit ist nun alles bewiesen; denn der Übergang von den Potentialen Π_1 und Π_2 in (10) und (11) zu den Potentialen Π_1 und Π_2 in (14) und (15) bedeutet für die einfallende Welle und für die gebeugte, auslaufende Welle nichts anderes als die Ersetzung $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \rightarrow -\mathfrak{E}$.