

# Das Babinetsche Prinzip der Optik

Von JOSEF MEIXNER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 1, 496—498 [1946]; eingegangen am 27. Juni 1946)

Es wird gezeigt, daß sich das Babinetsche Prinzip auch auf strenge Lösungen des elektromagnetischen Beugungsproblems übertragen läßt, wenn der beugende Schirm und der komplementäre Schirm eben und vollkommen leitend sind. Mit Hilfe dieses Prinzips kann aus dem elektromagnetischen Feld des einen Beugungsproblems das des komplementären Beugungsproblems für jeden Raumpunkt unmittelbar und in Strenge gewonnen werden.

Das Babinetsche Prinzip gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Beugungserscheinungen bei Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem ebenen Schirm bzw. in der dazu komplementären Öffnung. Dieses Prinzip gilt in der Regel als Ergebnis der Kirchhoffschen Beugungstheorie und bräuchte daher nicht notwendig in Strenge zu gelten. Doch hat v. Laue<sup>1</sup> bemerkt, daß sich dieses Prinzip in etwas modifizierter Form auf die strengen Lösungen des elektromagnetischen Beugungsproblems für den unendlich langen Streifen und den dazu komplementären Spalt übertragen läßt. Dies ist jedoch kein vereinzelter Ausnahmefall. Wir beweisen vielmehr im folgenden den Satz:

Trifft eine elektromagnetische Welle, aus dem Halbraum  $z \geq 0$  kommend, auf einen vollkommen leitenden ebenen Schirm  $F'$  mit einer ganz im Endlichen liegenden Öffnung  $F$ , so entsteht eine nach den Reflexionsgesetzen zu berechnende reflektierte Welle und eine von der Öffnung ausgehende Beugungswelle, welche in großer Entfernung den Charakter einer Kugelwelle hat. Ersetzt man nun

1. die reflektierte Welle, welche nur für  $z > 0$  vorhanden ist, durch die Fortsetzung der einfallenden Welle in den Halbraum  $z < 0$ ,

2.  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}$  durch  $-\mathfrak{E}$  sowohl in der einfallenden wie in der gebeugten Welle, so hat man die strenge Lösung des Problems der Beugung einer einfallenden elektromagnetischen Welle am vollkommen leitenden ebenen Schirm  $F$ , d. h. des komplementären Beugungsproblems.

<sup>1</sup> M. v. Laue, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. VIII, S. 344. Leipzig 1928.

Im wichtigen Fall einer einfallenden *ebenen* Welle läßt sich dieser Satz noch etwas übersichtlicher formulieren:

Dem Übergang von einer parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtwelle zu einer senkrecht polarisierten und dem gleichzeitigen Übergang zur komplementären Beugungsfigur entspricht in der gebeugten Welle die Ersetzung von  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{H}$  und von  $\mathfrak{H}$  durch  $-\mathfrak{E}$ , d. h. in genügender Entfernung von der beugenden Öffnung bzw. dem beugenden Schirm eine Drehung der Polarisationsebene um  $90^\circ$ .

In den obigen Formulierungen ist vorausgesetzt, daß alle Wellen im Vakuum laufen; in einem homogenen Dielektrikum bleibt alles mit unwesentlichen Änderungen gültig.

Der Beweis ist verhältnismäßig einfach und gelingt durch Kombination der Methode, mit welcher Bouwkamp<sup>2</sup> das verfeinerte Babinetsche Prinzip für die Beugung akustischer ebener Wellen an ebenen Schirmen und komplementären Öffnungen beweist, mit dem Verfahren, womit der Verf.<sup>3</sup> das elektromagnetische Beugungsproblem an vollkommen leitenden ebenen Figuren auf zwei voneinander unabhängige skalare Beugungsprobleme zurückführt.

Für zeitlich periodische Vorgänge im Vakuum mit der Zeitabhängigkeit  $e^{i\omega t}$  lauten die Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} = ik \mathfrak{E}, \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -ik \mathfrak{H}. \quad (1)$$

<sup>2</sup> Ch. J. Bouwkamp, Theoretische en numerieke behandeling van de buiging door en ronde opening. Diss. (Groningen). Groningen-Batavia 1941.

<sup>3</sup> Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl., im Druck.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$k$  ist die Wellenzahl,  $\mathfrak{E}$  die elektrische,  $\mathfrak{H}$  die magnetische Feldstärke. Die vollkommene Leitfähigkeit des beugenden Objekts wird durch die Randbedingungen

$$\mathfrak{E}_{\text{tang}} = 0, \quad \mathfrak{H}_{\text{norm}} = 0 \quad (2)$$

berücksichtigt. Das elektromagnetische Feld  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  kann man nach P. Debye<sup>4</sup> durch zwei skalare Potentiale  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  darstellen. Es ist, wenn  $\mathbf{r}$  = Radiusvektor

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot} (\mathbf{r} \Pi_1) - ik \text{ rot} (\mathbf{r} \Pi_2), \quad (3)$$

$$\mathfrak{H} = ik \text{ rot} (\mathbf{r} \Pi_1) + \text{rot rot} (\mathbf{r} \Pi_2). \quad (4)$$

Beide Potentiale genügen der Wellengleichung

$$\Delta \Pi_i + k^2 \Pi_i = 0 \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Für das Bestehen der Randbedingungen (2) ist hinreichend, daß<sup>3</sup>

$$\Pi_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial n} = 0. \quad (6)$$

Die Randbedingungen haben nur dann die einfache Gestalt (6), wenn das vollkommen leitende beugende Objekt *eben* ist. Bei gekrümmten beugenden Flächen sind die Randbedingungen für  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  im allgemeinen von sehr komplizierter Art, insbesondere lassen sie sich außer in einigen wenigen Grenzfällen nicht in eine Bedingung für  $\Pi_1$  allein und eine solche für  $\Pi_2$  allein separieren. Auf der Möglichkeit der Separierung der Randbedingungen für  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  im Falle *ebener* vollkommen leitender Flächen beruht es, daß sich das vektorielle elektromagnetische Beugungsproblem auf zwei skalare Beugungsprobleme zurückführen läßt.

Wir zerlegen den Beweis des Babinetischen Prinzips in fünf Schritte.

1. Die Maxwell'schen Gleichungen (1) bleiben ungeändert, wenn man  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}$  durch  $-\mathfrak{E}$  ersetzt. In den Potentialen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  bedeutet dies, daß  $\Pi_1$  durch  $\Pi_2$  und  $\Pi_2$  durch  $-\Pi_1$  ersetzt werden. Für die Randbedingungen (6) an einer vollkommen leitenden ebenen Figur gilt diese Invarianz jedoch nicht.

2. sei irgendein elektromagnetisches Wellenfeld durch die Potentiale  $\Pi_1^e$ ,  $\Pi_2^e$  gegeben. Schneiden wir es durch die vollkommen leitende Ebene  $z=0$  ab, so müssen wir zum ursprünglichen Feld für  $z \geq 0$  ein reflektiertes Feld  $\Pi_1^r$ ,

$\Pi_2^r$  hinzunehmen, um die Randbedingungen (6) für  $z=0$  zu erfüllen. Die Potentiale für das gesamte Feld im Halbraum  $z \geq 0$  lauten dann

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1^e(x, y, z) + \Pi_1^r(x, y, z) \\ = \Pi_1^e(x, y, z) - \Pi_1^e(x, y, -z), \\ \Pi_2^e(x, y, z) + \Pi_2^r(x, y, z) \\ = \Pi_2^e(x, y, z) + \Pi_2^e(x, y, -z). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für dieses Feld sind die Randbedingungen (6) auf der ganzen Ebene  $z=0$  erfüllt

$$\Pi_1^e + \Pi_1^r = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2^e}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2^r}{\partial z} = 0 \quad (8a, b)$$

für  $z=0$  und alle  $x, y$ .

Aus (7) folgt aber weiter, daß die Beziehungen gelten

$$\frac{\partial \Pi_1^e}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_1^r}{\partial z}, \quad \Pi_2^e = \Pi_2^r \quad (9a, b)$$

für  $z=0$  und alle  $x, y$ .

3. Wir zerlegen nun die vollkommen leitende Ebene  $z=0$  in zwei Teilstücke  $F$  und  $F'$ , von denen  $F$  ganz im Endlichen liegt. Dann können wir zwei verschiedene Beugungsprobleme unterscheiden. Die einfallende Welle sei immer durch  $\Pi_1^e$ ,  $\Pi_2^e$  gegeben.

Bei der Beugung einfallenden Welle an  $F'$  (Beugung an der Öffnung) wird die einfallende Welle durch die Ebene  $z=0$  abgeschnitten; wir haben für  $z \geq 0$  die einfallende und die oben berechnete reflektierte Welle, darüber überlagert sich eine von der Öffnung ausgehende Beugungswelle  $\Pi_1^b$ ,  $\Pi_2^b$ ; für  $z \leq 0$  ist nur diese Beugungswelle vorhanden. Sie hat für  $z \gtrless 0$  in großer Entfernung von der Öffnung den Charakter einer Kugelwelle.

Bei der Beugung der einfallenden Welle an  $F$  (Beugung am Schirm) wird sich die einfallende Welle über den ganzen Raum fortsetzen, darüber überlagert sich jedoch eine von  $F$  ausgehende Beugungswelle, die in großer Entfernung von  $F$  den Charakter einer Kugelwelle hat.

4. Beugung am Schirm  $F'$  mit der Öffnung  $F$ .

Wir verstehen unter  $\Pi_1^e$ ,  $\Pi_2^e$  die Potentiale des einfallenden elektromagnetischen Feldes, unter  $\Pi_1^r$ ,  $\Pi_2^r$  die bereits in (7) eingeführten Potentiale des an  $F + F'$  reflektierten Feldes; die Öffnung wird durch den Ansatz einer Kugelwelle mit den Potentialen  $\Pi_1^b$ ,  $\Pi_2^b$ , welche der Ausstrahlungsbedingung genügen, berücksichtigt. Für

<sup>4</sup> Ann. Physik 30, 57 [1909].

das elektromagnetische Feld machen wir den Ansatz

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^e + \Pi_1^r + \Pi_1^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ + \Pi_1^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} \Pi_2^e + \Pi_2^r + \Pi_2^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ - \Pi_2^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Dieser Ansatz muß folgenden Forderungen Genüge leisten.

- $\Pi_1^b$  und  $\Pi_2^b$  genügen der Wellengleichung.
- Sie haben für große Entfernung von  $F$  den Charakter von Kugelwellen, welche von  $F$  ausgehen, d. h. sie genügen der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung<sup>5</sup>.
- Sie erfüllen auf  $F'$  die Randbedingungen (6), d. h. wegen (8a, b)

$$\Pi_1^b = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2^b}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } F'. \quad (12a, b)$$

- Auf  $F$ , d. h. in der Öffnung, müssen sich die Werte der Funktionen  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_2$  sowie ihre Ableitungen nach  $x, y, z$  von  $z < 0$  her und von  $z > 0$  her stetig aneinanderschließen, also wegen (9a, b)

$$\frac{\partial \Pi_1^b}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi_1^e}{\partial z}; \quad \Pi_2^b = - \Pi_2^e \quad \text{in } F. \quad (13a, b)$$

Diese vier Forderungen stellen bei gegebener einfallender Welle ein gemischtes Randwertproblem dar: Es sind die Werte von  $\partial \Pi_1^b / \partial z$  bzw.  $\Pi_2^b$  auf  $F$ , von  $\Pi_1^b$  bzw.  $\partial \Pi_2^b / \partial z$  auf  $F'$  und die Ausstrahlungsbedingung, daß sich  $\Pi_1^b$  und  $\Pi_2^b$  in großer Entfernung von  $F$  für  $z > 0$  und für  $z < 0$  wie auslaufende Kugelwellen verhalten sollen, gegeben. Hieraus folgen, die Existenz der Lösungen vorausgesetzt, ihre Eindeutigkeit sowie

<sup>5</sup> A. Sommerfeld, Ber. dtsh. Math.-Ver. **21**, 309 [1913].

die Symmetrieeigenschaften von  $\Pi_1^b$  bzw.  $\Pi_2^b$  bezüglich der Ebene  $z = 0$ , die bereits in den Ansätzen (10) und (11) vorweggenommen wurden.

5. Beugung am Schirm  $F$ . Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu zeigen, daß die Potentiale

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^e + \Pi_1^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ \Pi_1^e + \Pi_1^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} - \Pi_1^e - \Pi_1^b(x, y, z) & \text{für } z \geq 0, \\ - \Pi_1^e + \Pi_1^b(x, y, -z) & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

die Beugung einer einfallenden Welle mit den Potentialen  $\Pi_2^e, -\Pi_1^e$  (entsprechend der Ersetzung  $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{H}, \mathfrak{H} \rightarrow -\mathfrak{E}$ ) am vollkommen leitenden ebenen Schirm  $F$  darstellen. Das ist tatsächlich der Fall; denn

- $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  genügen beide der Wellengleichung (5).
- Die gebeugten Wellen  $\Pi_2^b$  und  $-\Pi_1^b$  haben für große Entfernung von  $F$  den Charakter von Kugelwellen, welche von  $F$  ausgehen.

- Auf  $F$  erfüllen sie die Randbedingungen (6). Es ist  $\Pi_1 = 0$  wegen (13b) und  $\partial \Pi_2 / \partial z = 0$  wegen (13a).

- Auf  $F'$  gelten die Stetigkeitsbedingungen. Daß  $\Pi_1$  und  $\partial \Pi_2 / \partial z$  für  $z = 0$  stetig sind, läßt sich unmittelbar aus (14) und (15) ablesen. Die Stetigkeit von  $\partial \Pi_1 / \partial z$  folgt aus (12b), die von  $\Pi_2$  aus (12a). Da diese Stetigkeitseigenschaften identisch in  $x, y$  gelten, so sind auch alle Ableitungen nach  $x$  und  $y$  stetig. Aus der Wellengleichung (5) folgt dann, daß auch alle Ableitungen nach  $z$  stetig sind.

Damit ist nun alles bewiesen; denn der Übergang von den Potentialen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  in (10) und (11) zu den Potentialen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  in (14) und (15) bedeutet für die einfallende Welle und für die gebeugte, auslaufende Welle nichts anderes als die Ersetzung  $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{H}, \mathfrak{H} \rightarrow -\mathfrak{E}$ .